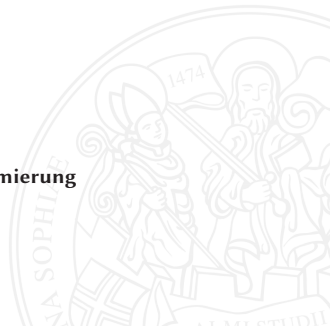


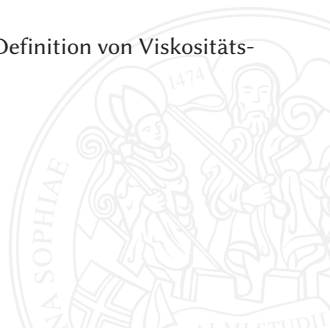
Definition von Viskositätslösungen

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



Zielsetzung für diesen Abschnitt:

- (1) Sie wissen, worum es sich bei Viskositätslösungen handelt.
- (2) Sie wissen, was halbstetige Funktionen und halbstetige Umhüllende sind.
- (3) Sie kennen den Zusammenhang zwischen Viskositätslösungen und klassischen Lösungen.
- (4) Sie verstehen die Wichtigkeit der Vorzeichen in der Definition von Viskositätslösungen.



Definition 4.1 (Halbstetigkeit)

Eine Funktion $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(i) halbstetig von oben, falls

$$\limsup_{(t', x') \rightarrow (t, x)} w(t', x') \leq w(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

(ii) halbstetig von unten, falls

$$\liminf_{(t', x') \rightarrow (t, x)} w(t', x') \geq w(t, x) \quad \text{für alle } (t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$

Definition 4.2 (Halbstetige Umhüllende)

Sei $w : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte Funktion.

(i) Die Funktion $w^* : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$w^*(t, x) \triangleq \limsup_{(t', x') \rightarrow (t, x)} w(t', x'), \quad (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

nennen wir die **obere halbstetige Umhüllende** von w .

(ii) Die Funktion $w_* : \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$w_*(t, x) \triangleq \liminf_{(t', x') \rightarrow (t, x)} w(t', x'), \quad (t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

nennen wir die **untere halbstetige Umhüllende** von w .

Definition 4.3 (Viskositätslösung)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ lokal beschränkt.

- (i) w heißt **Sublösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$ mit $\varphi \geq w^*$ und $\varphi(t, x) = w^*(t, x)$ gilt, dass

$$F(t, x, \varphi(t, x), \partial_t \varphi(t, x), D_x \varphi(t, x), D_x^2 \varphi(t, x)) \leq 0. \quad (4.7)$$

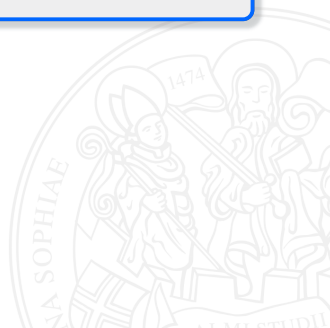
- (ii) w heißt **Superlösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$ mit $\varphi \leq w_*$ und $\varphi(t, x) = w_*(t, x)$ gilt, dass

$$F(t, x, \varphi(t, x), \partial_t \varphi(t, x), D_x \varphi(t, x), D_x^2 \varphi(t, x)) \geq 0. \quad (4.8)$$

- (iii) w heißt **Viskositätslösung** der PDE (4.2), falls w sowohl eine Sub- als auch eine Superlösung der PDE (4.2) im Viskositätssinne ist.

Lemma 4.4 (Klassische und Viskositätslösungen)

Sei $w \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$. Dann ist w genau dann eine Viskositätslösung der PDE (4.2), wenn w eine klassische Lösung der PDE ist.



Proposition 4.5 (Nicht-differenzierbare Viskositätslösungen)

Die Wertfunktion \mathcal{V} mit $\mathcal{V}(t, x) = g(x)$ für alle $(t, x) \in \bar{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ definiert in (4.1) ist eine Viskositätslösung der HJB Gleichung

$$-\partial_t \mathcal{V}(t, x) - \sup_{u \in [-K, K]} \left[\frac{1}{2} u^2 \partial_{xx}^2 \mathcal{V}(t, x) \right] = 0, \quad (t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}.$$

