Universität Trier

Definition von Viskositätslösungen

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Zielsetzung dieses Abschnitts

Zielsetzung für diesen Abschnitt:

(1) Sie wissen, worum es sich bei Viskositätslösungen handelt.

(2) Sie wissen, was halbstetige Funktionen und halbstetige Umhüllende sind.

(3) Sie kennen den Zusammenhang zwischen Viskositätslösungen und klassischen Lösungen.

(4) Sie verstehen die Wichtigkeit der Vorzeichen in der Definition von Viskositätslösungen.

Halbstetige Funktionen

Definition 4.1 (Halbstetigkeit)

Eine Funktion $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ heißt

(i) halbstetig von oben, falls

$$\limsup_{(t',x')\to(t,x)} w(t',x') \leq w(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

(ii) halbstetig von unten, falls

$$\liminf_{(t',x')\to(t,x)} w(t',x') \geq w(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}.$$

Halbstetige Umhüllende

Definition 4.2 (Halbstetige Umhüllende)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine lokal beschränkte Funktion.

(i) Die Funktion $w^* : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ mit

$$w^*(t,x) \triangleq \limsup_{(t',x') \to (t,x)} w(t',x'), \qquad (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

nennen wir die **obere halbstetige Umhüllende** von w.

(ii) Die Funktion $w_* : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ mit

$$w_*(t,x) \triangleq \liminf_{(t',x') \to (t,x)} w(t',x'), \qquad (t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O},$$

nennen wir die **untere halbstetige Umhüllende** von w.

Viskositätslösungen

Definition 4.3 (Viskositätslösung)

Sei $w : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ lokal beschränkt.

(i) w heißt **Sublösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$ mit $\varphi \geq w^*$ und $\varphi(t, x) = w^*(t, x)$ gilt, dass

$$F\big(t, x, \varphi(t, x), \partial_t \varphi(t, x), \mathrm{D}_x \varphi(t, x), \mathrm{D}_x^2 \varphi(t, x)\big) \leq 0. \tag{4.7}$$

(ii) w heißt **Superlösung im Viskositätssinne** der PDE (4.2), falls für alle $(t, x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}$ und alle $\varphi \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$ mit $\varphi \leq w_*$ und $\varphi(t, x) = w_*(t, x)$ gilt, dass

$$F\big(t, x, \varphi(t, x), \partial_t \varphi(t, x), \mathrm{D}_x \varphi(t, x), \mathrm{D}_x^2 \varphi(t, x)\big) \geq 0. \tag{4.8}$$

(iii) w heißt **Viskositätslösung** der PDE (4.2), falls w sowohl eine Sub- als auch eine Superlösung der PDE (4.2) im Viskositätssinne ist.

Klassische vs. Viskositätslösungen

Lemma 4.4 (Klassische und Viskositätslösungen)

Sei $w \in C^{1,2}(\mathcal{T} \times \mathcal{O})$. Dann ist w genau dann eine Viskositätslösung der PDE (4.2), wenn w eine klassische Lösung der PDE ist.

Proposition 4.5 (Nicht-differenzierbare Viskositätslösungen)

Die Wertfunktion $\mathcal{V}$ mit $\mathcal{V}(t,x) = g(x)$ für alle $(t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ definiert in (4.1) ist eine Viskositätslösung der HJB Gleichung

$$-\partial_t \mathcal{V}(t,x) - \sup_{u \in [-K,K]} \left[\frac{1}{2} u^2 \partial^2_{xx} \mathcal{V}(t,x) \right] = 0, \qquad (t,x) \in \mathcal{T} \times \mathcal{O}.$$