Universität Trier

Martingaloptimalität und das Bellman Prinzip

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung

Zielsetzung für diesen Abschnitt:

(1) Sie kennen das Bellman Prinzip und das Prinzip der Martingaloptimalität.

(2) Sie können die Ideen hinter diesen beiden Prinzipien auf allgemeinere Problemformulierungen übertragen.

(3) Sie können die Schwierigkeiten im Beweis des Bellman Prinzips nachvollziehen.

Das Bellman Prinzip: Zitat

Das **Bellman Prinzip**:

> *An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision.*
>
> *— Bellman 1957*

Übersetzung:

> *Eine optimale Entscheidungsfolge hat die Eigenschaft, dass, wie auch immer der Anfangszustand war und die erste Entscheidung ausfiel, die verbleibenden Entscheidungen eine optimale Entscheidungsfolge bilden müssen, bezogen auf den Zustand, der aus der ersten Entscheidung resultiert.*
>
> *— Bellman 1957*

Das Bellman Prinzip: Formal

Das Bellman Prinzip

Sei $(t, x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ und sei τ eine $\overline{\mathcal{T}}_t$-wertige Stoppzeit. Dann gilt

$$\mathcal{V}(t, x) = \sup_{\nu \in \mathcal{A}(t,x)} \mathrm{E}\Big[\int_t^\tau f\big(X_{t,x}^\nu(s), \nu(s)\big)\mathrm{d}s + \mathcal{V}\big(\tau, X_{t,x}^\nu(\tau)\big)\Big]. \qquad (3.10)$$

Martingaloptimalität

Theorem 3.8 (Martingaloptimalität)

Sei $W : \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion mit $W(T,x) = g(x)$ für alle $x \in \mathcal{O}$. Sei weiter $(t,x) \in \overline{\mathcal{T}} \times \mathcal{O}$ fest gewählt. Falls

(a) für jedes $\nu \in \mathcal{A}(t,x)$ der Prozess $Y^\nu = \{Y^\nu(s)\}_{s \in \overline{\mathcal{T}}_t}$ mit

$$Y^\nu(s) \triangleq \int_t^s f\big(X_{t,x}^\nu(r), \nu(r)\big) \mathrm{d}r + W\big(s, X_{t,x}^\nu(s)\big), \qquad s \in \overline{\mathcal{T}}_t,$$

ein Supermartingal ist und falls

(b) ein $\nu^* \in \mathcal{A}(t,x)$ existiert, so dass der Prozess Y^{ν^*} ein Martingal ist,

dann gilt $W(t,x) = \mathcal{V}(t,x)$ und der Kontrollprozess ν^* ist optimal.