

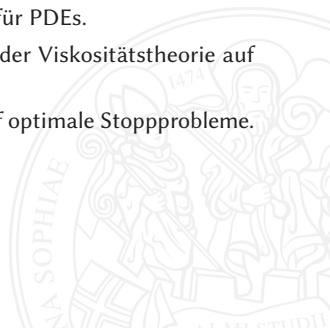
Stochastische Optimierungsprobleme: Beispiele

Stochastische Kontrolltheorie und Optimierung



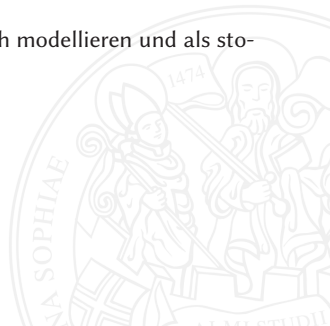
Der Semesterfahrplan:

- (1) **Beispiele:** Welche Arten von Optimierungsproblemen gibt es?
- (2) **Stochastische Analysis:** Kurze Wiederholung ausgewählter Resultate.
- (3) **Klassische stochastische Steuerung:** Allgemeine Formulierung, Zusammenhang zur Martingaltheorie, Zusammenhang zur PDE Theorie.
- (4) **Viskositätslösungen:** Schwaches Lösungskonzept für PDEs.
- (5) **Die stochastische Perron Methode:** Anwendung der Viskositätstheorie auf klassische Steuerungsprobleme.
- (6) **Optimales Stoppen:** Übertragung der Konzepte auf optimale Stoppprobleme.



Ziele der heutigen Veranstaltung:

- (1) Sie kennen die vier verschiedenen Typen von stochastischen Optimierungsproblemen und können diese unterscheiden.
- (2) Sie kennen Beispiele für die verschiedenen Typen von stochastischen Optimierungsproblemen.
- (3) Sie können eine reale Problemstellung mathematisch modellieren und als stochastisches Optimierungsproblem formulieren.

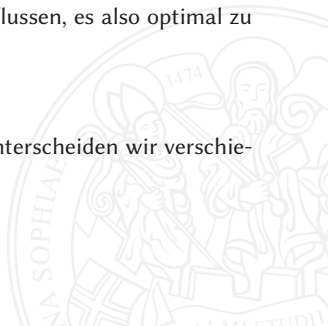


Worum geht es in der Vorlesung?

In der **Stochastischen Kontrolltheorie und Optimierung** geht es um:

- Stochastische Optimierungsprobleme ☺
- Die Probleme besitzen immer eine zeitliche Komponente.
- Genauer: Das zugrundeliegende System durch einen stochastischen Prozess beschreiben.
- Dieser stochastische Prozess kann auf verschiedene Arten vom Optimierer beeinflusst werden.
- Ziel ist es, das System auf optimale Weise zu beeinflussen, es also optimal zu steuern bzw. zu kontrollieren.

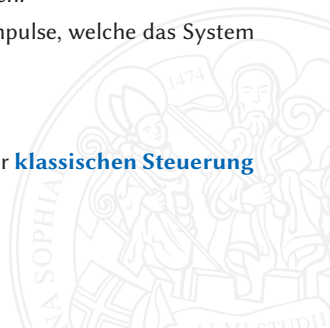
Je nachdem, wie das System beeinflusst werden kann, unterscheiden wir verschiedene Typen von Optimierungsproblemen.



Welche Möglichkeiten gibt es, einen stochastischen Prozess zu beeinflussen?

- **Optimales Stoppen:** Das Einfrieren des Systems durch Stoppen des stochastischen Prozesses.
- **Klassische Steuerung:** Der Optimierer beeinflusst das System durch Änderung der lokalen Drift und/oder der lokalen Volatilität des stochastischen Prozesses.
- **Singuläre Steuerung:** Der Optimierer steuert das System durch Reflektieren des stochastischen Prozesses an gewählten Schranken.
- **Impulssteuerung:** Steuerung des Systems durch Impulse, welche das System zu Sprüngen veranlassen.

In dieser Vorlesung befassen wir uns hauptsächlich mit der **klassischen Steuerung** und dem **optimalen Stoppen**.



1.1 Optimales Stoppen

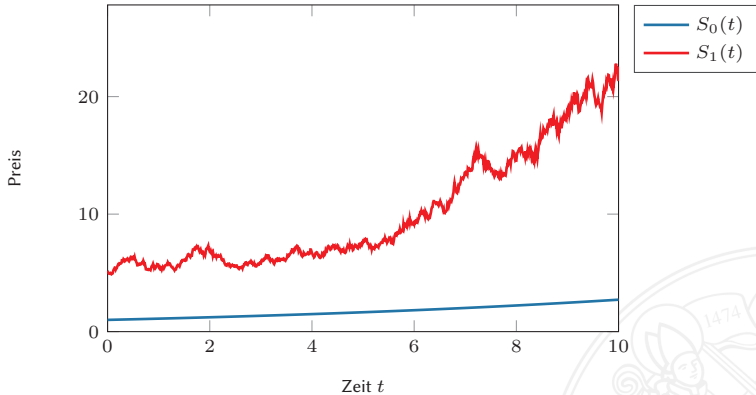


Abbildung: Preis der Anleihe und der Aktie im Verlauf der Zeit.

1.1 Optimales Stoppen

Eine **Amerikanische Put Option** auf die Aktie S_1 mit Ausübungspreis K und Laufzeit T gibt ihrem Besitzer das Recht (und nicht die Pflicht) die Aktie S_1 zu einem beliebigen Zeitpunkt $\tau \in [0, T]$ zu einem Preis von K Geldeinheiten zu verkaufen.

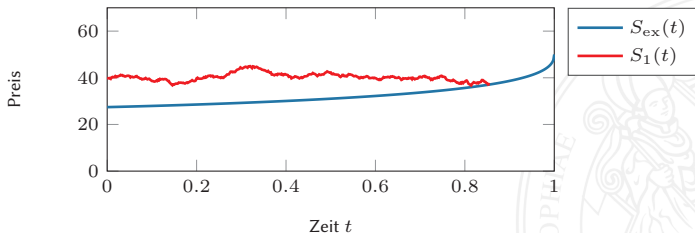


1.1 Optimales Stoppen

Es stellt sich heraus, dass der Put optimalerweise dann ausübt wird, wenn der Aktienpreis zum ersten Mal unter eine (zeitabhängige) Schranke S_{ex} fällt, d.h. die optimale Stoppzeit τ^* ist gegeben durch

$$\tau^* \triangleq \inf\{t \in [0, T] : S_1(t) \leq S_{\text{ex}}(t)\}.$$

Man beachte, dass der Aktienpreis auf dem Intervall $[0, T]$ unter Umständen niemals unter S_{ex} fällt. In diesem Fall wird die Option niemals ausgeübt und es gilt $\tau^* = \infty$.



1.2 Klassische stochastische Steuerung

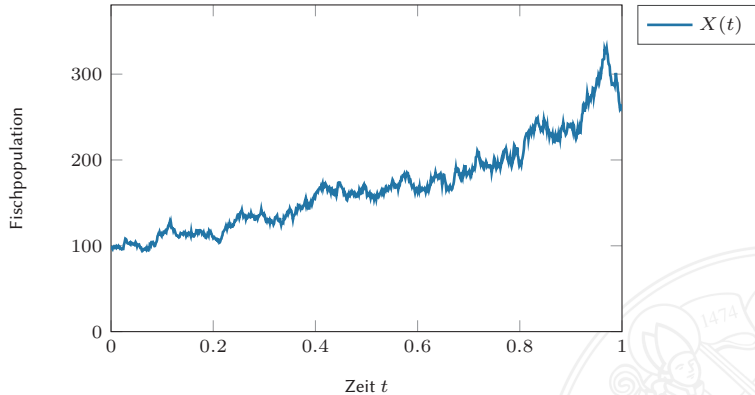


Abbildung: Fischpopulation ohne Abfischung im Verlauf der Zeit.

1.2 Klassische stochastische Steuerung

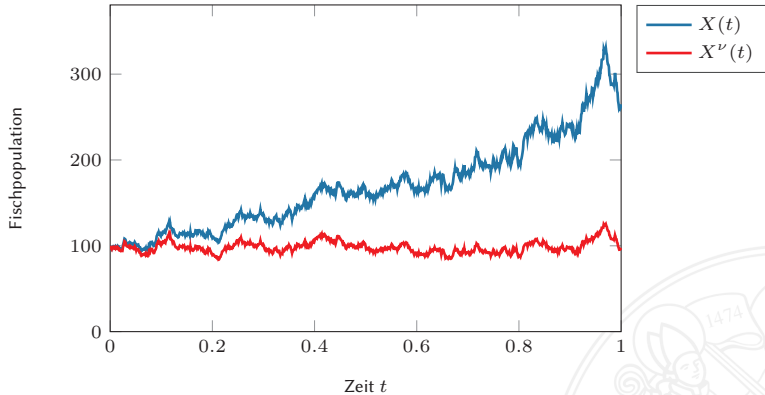


Abbildung: Fischpopulation ohne und mit Abfischung im Verlauf der Zeit.

1.3 Singuläre Steuerung

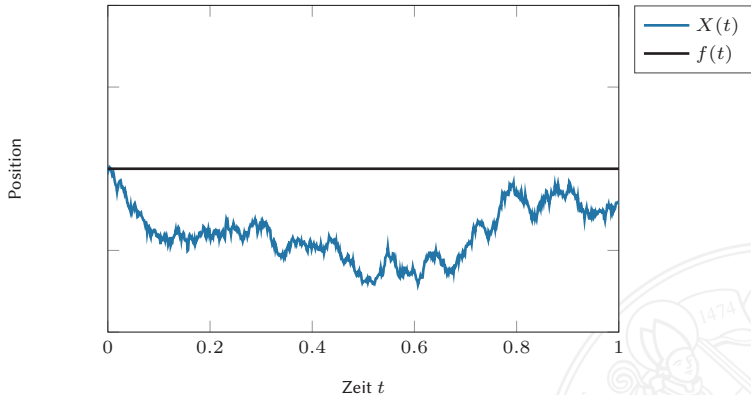


Abbildung: Optimale und tatsächliche Flugbahn des Raumschiffs.

1.3 Singuläre Steuerung

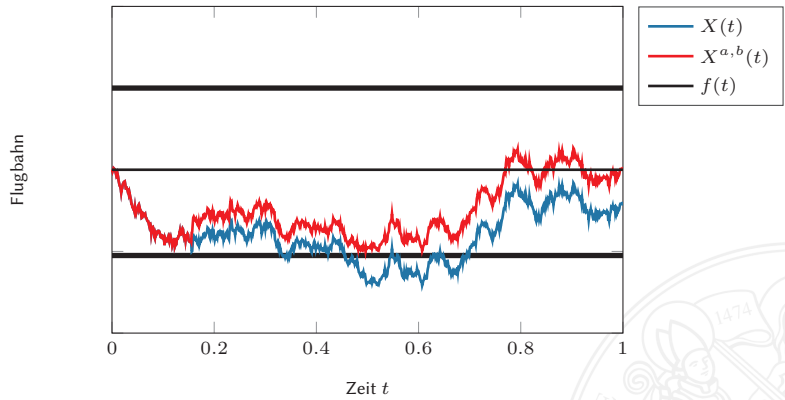
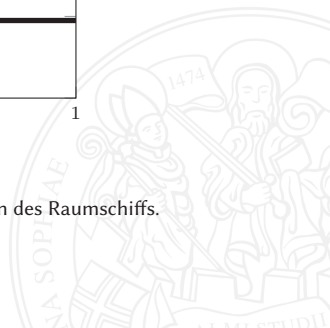


Abbildung: Unkontrollierte und kontrollierte Flugbahn des Raumschiffs.



1.3 Singuläre Steuerung

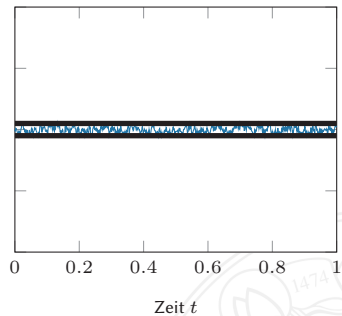
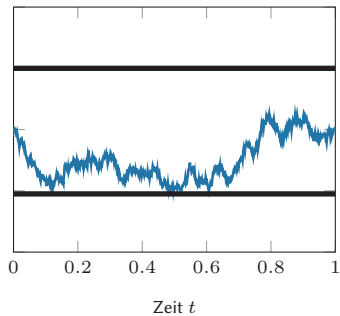


Abbildung: Vergleich: Seltene vs. häufige Korrektur der Flugbahn.

1.4 Impulssteuerung

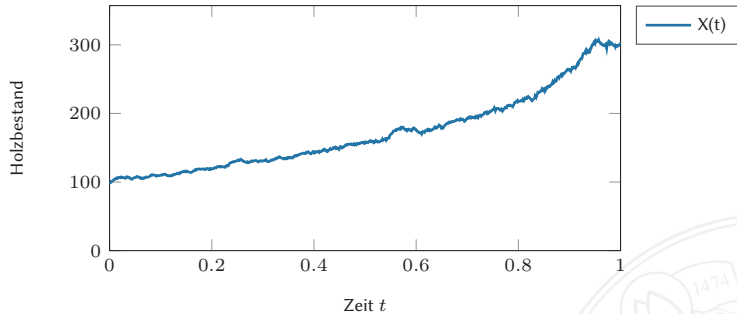
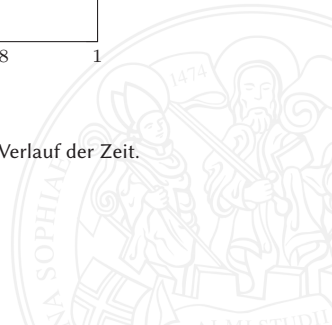


Abbildung: Holzbestand ohne Bewirtschaftung im Verlauf der Zeit.



1.4 Impulssteuerung

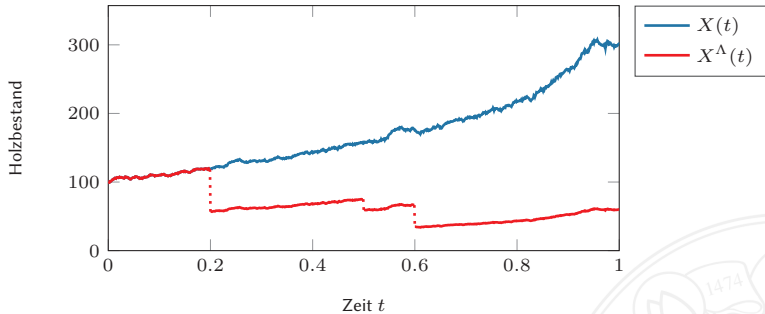


Abbildung: Holzbestand ohne und mit Bewirtschaftung im Verlauf der Zeit.